European Journal of Combinatorics 31 (2010) 64–71

Contents lists available at ScienceDirect

European Journal of Combinatorics

journal homepage: www.elsevier.com/locate/ejc

# Un $q$-tableau d'Euler

Arthur Randrianarivony

*Département de Mathématiques et informatique, Faculté des Sciences, BP 906 Antananarivo 101, Madagascar*

ARTICLE INFO

*Article history:*
Received 1 January 2009
Accepted 23 April 2009
Available online 22 May 2009

ABSTRACT

In [R. Clarke, G.N. Han, J. Zeng, A combinatorial interpretation of the Seidel generation of $q$-derangement numbers, Ann. Comb. 1 (1997) 313–327] Clarke, Han and Zeng introduced a generalized Euler's difference table. In this paper, we add a third variable and give a combinatorial interpretation of this generalization.



## 1. Introduction

Le problème de rencontre en combinatoire classique consiste à compter les permutations sans point fixe [2]. Le tableau aux différences d'Euler défini par

$$g_n^n = n!, \quad g_n^m = g_n^{m+1} - g_{n-1}^m \ (0 \le m \le n-1) \tag{1}$$

est un outil qui permet de déterminer facilement le nombre de dérangements de $[n] := \{1, 2, \dots, n\}$ qui correspond à la valeur de $g_n^0$ [4]. Il mène également à la formule explicite de ce nombre. Clarke, Han et Zeng ont prolongé ce tableau d'Euler, en se donnant une suite initiale de polynômes sur le groupe symétrique $S_n$, à savoir les polynômes $g_n^n(q, X) = \sum_{\sigma \in S_n} q^{\operatorname{maj}\sigma} X^{\operatorname{fix}\sigma}$ et montré que la suite des polynômes $g_n^m(q, X)$ $(0 \le m \le n-1)$ définis par

$$g_n^m(q, X) = g_n^{m+1}(q, X) - Xq^{n-m-1} g_{n-1}^m(q, X)$$

pouvaient s'interpréter à l'aide d'une autre statistique mahonienne "maf" et "fix" (voir [1]).

Utilisant la notation $\chi$ qui applique chaque propriété $A$ vers 1 ou 0 suivant que $A$ est vraie ou fausse, rappelons que les statistiques "fix" et "maj" sont définies par

$$\operatorname{fix}\sigma := \sum_{i=1}^{n} \chi(\sigma(i) = i), \qquad \operatorname{maj}\sigma := \sum_{i=1}^{n-1} i\chi(\sigma(i) > \sigma(i+1)).$$

En posant $A_n(q, X) := \sum_{\sigma \in S_n} q^{\operatorname{maj}\sigma} X^{\operatorname{fix}\sigma}$, Clarke et al. ont montré de plus que

$$\sum_{n \ge 0} A_n(q, X) \frac{u^n}{(q; q)_n} = \left(1 - \frac{u}{1-q}\right)^{-1} \frac{(u; q)_\infty}{(uX; q)_\infty} \tag{2}$$

*E-mail address:* arthur@univ-antananarivo.mg.

0195-6698/$ – see front matter © 2009 Elsevier Ltd. All rights reserved.
doi:10.1016/j.ejc.2009.04.001

où on a utilisé les notations pour les $q$-factorielles montantes [9]

$$(a;q)_k := \begin{cases} 1 & \text{si } k=0; \\ (1-a)(1-aq)\cdots(1-aq^{k-1}) & \text{si } k\geq 1; \end{cases}$$
$$(a;q)_\infty := \prod_{k\geq 0}(1-aq^k).$$

Notons que (2) est une identité due à Gessel et Reutenauer [10].

De l'autre côté, Foata et Han ont introduit la statistique "pix", "nombre de points pixés", et montré [8] que

$$\sum_{\sigma\in S_n} q^{\operatorname{inv}\sigma}X^{\operatorname{pix}\sigma} = \sum_{\sigma\in S_n} q^{\operatorname{maj}\sigma}X^{\operatorname{fix}\sigma} \tag{3}$$

en prouvant que

$$\sum_{n\geq 0}\left(\sum_{\sigma\in S_n} q^{\operatorname{inv}\sigma}X^{\operatorname{pix}\sigma}\right)\frac{u^n}{(q;q)_n} = \left(1-\frac{u}{1-q}\right)^{-1}\frac{(u;q)_\infty}{(uX;q)_\infty}.$$

On rappelle que "inv" est le nombre d'inversions défini par

$$\operatorname{inv}\sigma := \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j>i}\chi(\sigma(i)>\sigma(j)).$$

Soit $u := x_1x_2\cdots x_n$ un mot dont les lettres sont des entiers positifs sans répétitions. On dit que $u$ est un désarrangement si $x_1 > x_2 > \cdots > x_{2k}$ et $x_{2k} < x_{2k+1}$ pour une certaine valeur $k \geq 1$. Par convention $x_{n+1} = \infty$. Cette notion a été introduite par Désarménien [3]. Par convention, le mot vide $e$ est un désarrangement.

La factorisation pixée d'une permutation $u := x_1x_2\cdots x_n$ de $[n]$,introduite par D. Foata et G. Han (voir, par exemple, [6–8]), est par définition la décomposition $u = u^g u^d$ où $u^g$ est un mot croissant, éventuellement vide, et $u^d$ un désarrangement. Si $u^g = x_1x_2\cdots x_k$, on définit $\operatorname{Pix} u := \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ et $\operatorname{pix} u := \#\operatorname{Pix} u$. Les éléments de $\operatorname{Pix} u$ sont appelés points pixés de $u$.

Par exemple, soit $u = 245973186$ une permutation de [6]. On a $u^g = 245$ et $u^d = 973186$. Par suite $\operatorname{Pix} u = \{2, 4, 5\}$ et $\operatorname{pix} u = 3$.

Une autre classe de statistiques dont nous aurons besoin est la classe des "lower records". Soit $u = x_1x_2\cdots x_n$ un mot dont toutes les lettres sont des entiers positifs sans répétitions. Une lettre $x_i$ est dite un lower record de $u$ si $x_i < x_j$ pour tout $j$ tel que $j+1 \leq i \leq n$.

Dans leur article [5], D. Foata et G.N. Han ont étudié cette classe de statistiques sur les mots en distinguant leur parité. En adoptant leurs notations, nous notons $\operatorname{Lower}\sigma$ l'ensemble des lower records de $u$, et $\operatorname{lower} u := \#\operatorname{Lower} u$.

Posons

$$\operatorname{DesLower} u := \{j\in[n];\ x_j\in\operatorname{Lower} u, x_j > x_{j+1}\};$$
$$\operatorname{IDesLower} u := \{x_j\in\operatorname{Lower} u;\ j\in\operatorname{DesLower}\};$$
$$\operatorname{deslower} u := \#\operatorname{DesLower} u$$

où l'on convient que $x_{n+1} = 0$.

$\operatorname{DesLower} u$ n'est autre que l'ensemble des descentes $j$ du mot $u0$ telles que $x_j$ est un lower record de $u$.

Soit, par exemple, $u = 78563241$. On a

$$\operatorname{Lower} u = \{1, 2, 3, 5, 7\},\ \operatorname{DesLower} u = \{5, 8\},\ \operatorname{IDesLower} u = \{1, 3\}.$$

Sur $S_n$ nous définissons la statistique linv par

$$\forall u\in S_n,\quad \operatorname{linv} u := \operatorname{inv} u + \operatorname{lower} u - \sum_{j=1}^{n} j\chi(j\in\operatorname{DesLower} u). \tag{4}$$

Un de nos deux principaux résultats est le suivant:

**Théorème 1.1.** *Il existe une bijection $\Psi$ de $S_n$ sur lui-même telle que*

$$(\mathrm{inv}, \mathrm{Pix})u = (\mathrm{linv}, \mathrm{IDesLower})\Psi(u).$$

Posons

$$B_n(q, X, Z) := \sum_{u \in S_n} q^{\mathrm{linv}\, u} X^{\mathrm{deslower}\, u} Z^{\mathrm{lower}\, u}.$$

La relation (3) et le Théorème 1.1 montrent que

$$B_n(q, X, 1) = g_n^n(q, X).$$

Considérons alors la suite des polynômes $\{g_n^m(q, X, Z)\}_{0 \le m \le n}$, généralisant la suite $\{g_n^m(q, X)\}_{0 \le m \le n}$, définis par

$$\begin{cases} g_n^n(q, X, Z) = B_n(q, X, Z) \\ g_n^m(q, X, Z) = g_n^{m+1}(q, X, Z) - X Z q^{n-m-1} g_{n-1}^m(q, X, Z) \quad (0 \le m \le n-1) \end{cases} \tag{5}$$

Voici les valeurs de $g_n^m(q, X, Z)$ pour $0 \le m \le n \le 3$:

$$\begin{aligned}
&g_1^1(q, X, Z) = XZ \\
&g_1^0(q, X, Z) = 0 \\
&g_2^2(q, X, Z) = qZ + X^2 Z^2 \\
&g_2^1(q, X, Z) = qZ \\
&g_2^0(q, X, Z) = qZ \\
&g_3^3(q, X, Z) = (q + q^2)Z + (q + q^2 + q^3)XZ^2 + X^3 Z^3 \\
&g_3^2(q, X, Z) = (q + q^2)Z + (q^2 + q^3)XZ^2 \\
&g_3^1(q, X, Z) = (q + q^2)Z + q^3 XZ^2 \\
&g_3^0(q, X, Z) = (q + q^2)Z.
\end{aligned}$$

**Théorème 1.2.** *$g_n^m(q, X, Z)$ admet l'interprétation combinatoire suivante:*

$$g_n^m(q, X, Z) = \sum_{u \in S_n^m} q^{\mathrm{linv}\, u} X^{\mathrm{deslower}\, u} Z^{\mathrm{lower}\, u}$$

*où $S_n^m$ est l'ensemble de toutes les permutations de $[n]$ tels que*

$$\mathrm{IDesLower}\, u \subset \{n - m + 1, n - m + 2, \ldots, n\}.$$

Comme conséquence, en notant $\Delta_n := \{u \in S_n;\ \mathrm{IDesLower}\, u = \emptyset\}$, ensemble des permutations de $[n]$ n'admettant pas deux lower records adjacents et ne se terminant pas par 1, le $q$-dérangement $d_n(q) := \sum_{\sigma \in D_n} q^{\mathrm{maj}\, \sigma}$ où $D_n$ est l'ensemble des dérangements de $[n]$, admet une autre interprétation combinatoire

$$d_n(q) = \sum_{\sigma \in \Delta_n} q^{\mathrm{inv}\, \sigma + \mathrm{lower}\, \sigma}.$$

Nous verrons dans la dernière section une autre expression analytique du nombre de dérangements $d_n$. Nous consacrons la Section 2 et la Section 3 respectivement à la construction de la bijection $\Psi$ et à la démonstration du Théorème 1.2.

## 2. La bijection $\Psi$

Pour tout mot $m$ formé par des entiers tous distincts, on note respectivement $|m|$, $F(m)$, $L(m)$ et $\inf m$ la longueur, la première lettre, la dernière et la plus petite lettre de $m$. On note également $r(m)$ le mot renversé de $m$, c-à-d, $r(m) := x_n x_{n-1} \cdots x_1$ si $m = x_1 x_2 \cdots x_n$, et si $m' := x'_1 x'_2 \cdots x'_k$ est un sous mot de $m$ tel que $x'_k \in \mathrm{Lower}\, m$, alors on note $\mathrm{per}_m(m')$ le mot déduit de $m'$ comme suit:

- si $k$ est pair, alors on permute $x'_{2l-1}$ et $x'_{2l}$ pour tout $x'_{2l} \in \mathrm{Lower}\, m$;
- si $k$ est impair, alors on permute $x'_{2l}$ et $x'_{2l+1}$ pour tout $x'_{2l+1} \in \mathrm{Lower}\, m$.

Par exemple, si $m = 78356421$, $\mathrm{per}_m(783) = 738$ et $\mathrm{per}_m(6421) = 6412$.
On désigne par $e$ le mot vide.
Maintenant soit $\sigma \in S_n$. Si $\sigma = 12\cdots n$, on définit $\Psi(\sigma) := n\cdots 21$.
Supposons $\sigma \neq 12\cdots n$ et soit $\sigma^g\sigma^d$ sa factorisation pixée. On a $\sigma^d \neq e$. On peut décomposer $\sigma^d$ de manière unique sous la forme $m_1m_2\cdots m_{k+1}$ où $m_1, m_2, \ldots, m_k$ sont des mots non vides vérifiant les deux conditions suivantes:
(i) $L(m_k) = \inf \sigma^d$;
(ii) Si $L(\sigma^d) \neq \inf \sigma^d$ (resp. $L(\sigma^d) = \inf \sigma^d$), alors $L(m_1), L(m_2), \ldots, L(m_k)$ (resp. $L(m_1), L(m_2), \ldots, L(m_{k-1})$) sont les seuls lower records de $\sigma^d$ n'appartenant pas à $\mathrm{IDesLower}\, \sigma^d$.
L'entier $k$ est donc entièrement déterminé par

$$k = \mathrm{lower}\, \sigma^d - \mathrm{deslower}\, \sigma^d + \chi(L(\sigma^d) = \inf \sigma^d).$$

Illustrons cette décomposition par un exemple.

**Exemple 1.** *Soit* $\sigma = 1\ 4\ 5\ 8\ 13\ 14\ 12\ 10\ 9\ 6\ 15\ 11\ 7\ 3\ 2 \in S_{15}$.
*On a* $\sigma^g = 1\ 4\ 5\ 8\ 13\ 14$ *et* $\sigma^d = 12\ 10\ 9\ 6\ 15\ 11\ 7\ 3\ 2$.
*Ainsi* $L(\sigma^d) = \inf \sigma^d = 2$, *et 6 est le seul lower record de* $\sigma^d$ *n'appartenant pas à* $\mathrm{IDesLower}\, \sigma^d$. *Par conséquent,* $k = 2$, $m_1 = 12\ 10\ 9\ 6$, $m_2 = 15\ 11\ 7\ 3\ 2$ *et* $m_3 = e$.

Comme $\sigma^d$ est un désarrangement non vide, alors $|m_1|$ est positif et pair. De plus, puisque $L(m_{i-1}) < F(m_i)(2 \le i \le k)$, alors $F(m_i) \neq L(m_i)$. Donc les mots $m_1, m_2, \ldots, m_k$ sont tous de longueur $\ge 2$. Notons

$$\mathrm{per}(\sigma^d) := \mathrm{per}_{\sigma^d}(m_1)\mathrm{per}_{\sigma^d}(m_2)\cdots \mathrm{per}_{\sigma^d}(m_k)m_{k+1}.$$

Soit $t_1, \ldots, t_s$ les lower records de $\mathrm{per}(\sigma^d)$et $d_1, \ldots, d_{s+1}$ les mots décroissants (éventuellement vides) tels que $d_1d_2\cdots d_{s+1} = r(\sigma^g)$ et $t_{i-1} > x > t_i$ pour toute lettre $x$ de $d_i$ et pour tout $1 \le i \le s+1$, avec la convention $t_0 = \infty$ et $t_{s+1} = 0$.
On définit $\sigma' := \Psi(\sigma)$ comme étant le mot déduit de $\mathrm{per}(\sigma^d)$ en insérant $d_i$ juste avant $t_i$ pour tout $1 \le i \le s$, et $d_{s+1}$ en dernière position.

**Exemple 2.** *Reprenons la permutation de l'exemple précédent. On a:*
$\mathrm{per}(\sigma^d) = \mathrm{per}_{\sigma^d}(12\ 10\ 9\ 6)\mathrm{per}_{\sigma^d}(15\ 11\ 7\ 3\ 2) = 10\ 12\ 6\ 9\ 15\ 11\ 7\ 2\ 3$;
$t_1 = 10$, $t_2 = 6$, $t_3 = 2$;
$d_1 = 14\ 13$, $d_2 = 8$, $d_3 = 5\ 4$ *et* $d_4 = 1$.
*D'où* $\Psi(\sigma) = 14\ 13\ 10\ 12\ 8\ 6\ 9\ 15\ 11\ 7\ 5\ 4\ 2\ 3\ 1$.

Montrons qu'on a bien

$$\mathrm{IDesLower}\, \sigma' = \mathrm{Pix}\ \sigma, \qquad \mathrm{linv}\ \sigma' = \mathrm{inv}\, \sigma.$$

D'après la définition de "per", $\mathrm{IDesLower}\, \mathrm{per}(\sigma^d) = \emptyset$. Par conséquent, $\mathrm{IDesLower}\, \sigma'$ est composé de toutes les lettres des $d_i(1 \le i \le s+1)$, c-à-d,

$$\mathrm{IDesLower}\, \sigma' = \mathrm{Pix}\, \sigma.$$

D'autre part, la définition de "per" implique également que

$$\mathrm{inv}\, \sigma^d = \mathrm{inv}\, \mathrm{per}(\sigma^d) + \mathrm{lower}\, \mathrm{per}(\sigma^d)$$
$$\mathrm{lower}\, \sigma' = \mathrm{deslower}\, \sigma' + \mathrm{lower}\, \mathrm{per}(\sigma^d)$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{inv}\, \sigma^g \mathrm{per}(\sigma^d) &= \mathrm{inv}\, \sigma' - \sum_{i=1}^{s+1} (j-1)\chi(\sigma'(j) \text{est une lettre de } d_i) \\
&= \mathrm{inv}\, \sigma' - \sum_{j=1}^{n} (j-1)\chi(j \in \mathrm{DesLower}\, \sigma') \\
&= \mathrm{inv}\, \sigma' - \sum_{j=1}^{n} j\chi(j \in \mathrm{DesLower}\, \sigma') + \mathrm{deslower}\, \sigma'.
\end{aligned}$$

Par suite

$$\begin{aligned}
\operatorname{inv}\sigma &= \operatorname{inv}\sigma^g\sigma^d \\
&= \operatorname{inv}\sigma^g \operatorname{per}(\sigma^d) + \operatorname{lowerper}(\sigma^d) \\
&= \operatorname{inv}\sigma' + \operatorname{lower}\sigma' - \sum j\chi(j \in \operatorname{DesLower}\sigma') \\
&= \operatorname{linv}\sigma'.
\end{aligned}$$

Il nous reste à montrer que $\Psi$ est bijective. Pour cela, il suffit de construire son inverse.

Soit $\sigma' \in S_n$. En gardant les notations précédentes, $\sigma^g$ est le mot croissant formé par tous les éléments de IDesLower $\sigma'$ etper$(\sigma^d)$ se déduit de $\sigma'$ en supprimant tous ces éléments de IDesLower $\sigma'$.

Enfin, en désignant par $y_i$ la lettre de per$(\sigma^d)$ qui se trouve à droite de $t_i$ $(1 \le i \le s)$ ($y_i$ existe et $y_i \ne t_{i+1}$ car IDesLower per$(\sigma^d) = \emptyset$), alors $\sigma^d$ se déduit de per$(\sigma^d)$ en permutant $y_i$ et $t_i$ pour tout $1 \le i \le s$. Donc $\sigma$ est bien déterminé. ■

**Exemple 3.** *Soit* $\sigma' = \underline{14}\ \underline{9}\ \mathbf{7}\ 12\ 8\ 10\ \underline{6}\ \mathbf{5}\ 15\ \mathbf{4}\ 13\ \mathbf{2}\ 3\ 11\ \underline{1}$. *Les éléments de* IDesLower $\sigma'$ *sont les lettres soulignées, et les lettres* $t_i$ *sont les lettres en caractère gras. On a*

$$\begin{aligned}
&\sigma^g = 1\ 6\ 9\ 14 \\
&per(\sigma^d) = \mathbf{7}\ 12\ 8\ 10\ \mathbf{5}\ 15\ \mathbf{4}\ 13\ \mathbf{2}\ 3\ 11 \\
&\sigma^d = 12\ 7\ 8\ 10\ 15\ 5\ 13\ 4\ 3\ 2\ 11.
\end{aligned}$$

*Donc*

$$\sigma = 1\ 6\ 9\ 14\ 12\ 7\ 8\ 10\ 15\ 5\ 13\ 4\ 3\ 2\ 11.$$

On a le tableau suivant pour $n = 4$

| pix $\sigma$ | Pix $\sigma$ | inv $\sigma$ | $\sigma$ | $\Psi(\sigma)$ | linv $\Psi(\sigma)$ | IDesLower $\Psi(\sigma)$ | deslower $\Psi(\sigma)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | {1,2,3,4} | 0 | 1234 | 4321 | 0 | {1,2,3,4} | 4 |
| | {1,2} | 1 | 1243 | 3421 | 1 | {1,2} | |
| | {1,3} | 2 | 1342 | 3241 | 2 | {1,3} | |
| 2 | {1,4} | 3 | 1432 | 4231 | 3 | {1,4} | 2 |
| | {2,3} | 3 | 2341 | 3214 | 3 | {2,3} | |
| | {2,4} | 4 | 2431 | 4213 | 4 | {2,4} | |
| | {3,4} | 5 | 3421 | 4312 | 5 | {3,4} | |
| | {1} | 1 | 1324 | 2341 | 1 | {1} | |
| | {1} | 2 | 1423 | 2431 | 2 | {1} | |
| | {2} | 2 | 2314 | 2134 | 2 | {2} | |
| 1 | {2} | 3 | 2413 | 2143 | 3 | {2} | 1 |
| | {3} | 3 | 3214 | 3124 | 3 | {3} | |
| | {3} | 4 | 3412 | 3142 | 4 | {3} | |
| | {4} | 4 | 4213 | 4123 | 4 | {4} | |
| | {4} | 5 | 4312 | 4132 | 5 | {4} | |
| | | 1 | 2134 | 1234 | 1 | | |
| | | 2 | 2143 | 1243 | 2 | | |
| | | 2 | 3124 | 1324 | 2 | | |
| 0 | ∅ | 3 | 3142 | 1342 | 3 | ∅ | 0 |
| | | 4 | 3241 | 2314 | 4 | | |
| | | 3 | 4123 | 1423 | 3 | | |
| | | 4 | 4132 | 1432 | 4 | | |
| | | 5 | 4231 | 2413 | 5 | | |
| | | 6 | 4321 | 3412 | 6 | | |

## 3. Démonstration du Théorème 1.2

Posons

$$\bar{g}_n^m(q,X,Z) := \sum_{u\in S_n^m} q^{\mathrm{linv}\,u} X^{\mathrm{deslower}\,u} Z^{\mathrm{lower}\,u}.$$

Considérons la transformation bijective $\theta_1$ de $S_n^{m+1}$ vers $S_n^m \cup S_{n-1}^m$ définie comme suit: Soit $u \in S_n^{m+1}$.

- Si $n-m \notin \mathrm{IDesLower}\,u$, alors on définit $\theta_1(u) := u$.
- Si $n-m \in \mathrm{IDesLower}\,u$, soit $u^*$ le mot déduit de $u$ en supprimant la lettre $n-m$. On définit $\theta_1(u) := \mathrm{red}\,u^*$ où $\mathrm{red}\,u^*$ est la permutation de $[n-1]$ déduite de $u^*$ en diminuant de 1 toute lettre de $u^*$ supérieure à $n-m$.

Dans le premier cas, $\theta_1(u) \in S_n^m$, et dans le second, $\theta_1(u) \in S_{n-1}^m$.
Supposons que $n-m \in \mathrm{IDesLower}\,u$. On a

$$\mathrm{lower}\,u = \mathrm{lower}\,\theta_1(u) + 1, \qquad \mathrm{deslower}\,u = \mathrm{deslower}\,\theta_1(u) + 1.$$

D'autre part, soit $k$ l'entier tel que $u(k) = n-m$. Alors

$$\begin{aligned}&\mathit{inv}\,u = \mathrm{inv}\,\theta_1(u) + (k-1) + (n-m-1);\\ &\mathit{DesLower}\,\theta_1(u) = \mathrm{DesLower}\,u \setminus \{k\} = \{j<k;\ j \in \mathrm{DesLower}\,u\}.\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\mathrm{linv}\,u &= \mathrm{inv}\,u + \mathrm{lower}\,u - \sum j\chi(j \in \mathrm{DesLower}\,u)\\ &= \mathrm{inv}\,\theta_1(u) + k + n - m - 1 + \mathrm{lower}\,\theta_1(u) - k - \sum j\chi(j \in \mathrm{DesLower}\,\theta_1(u))\\ &= \mathrm{linv}\,\theta_1(u) + n - m - 1.\end{aligned}$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned}\bar{g}_n^{m+1}(q,X,Z) &= \sum_{u\in S_n^{m+1},\, n-m\notin \mathrm{IDesLower}\,u} q^{\mathrm{linv}\,u} X^{\mathrm{deslower}\,u} Z^{\mathrm{lower}\,u}\\ &\quad + \sum_{u\in S_n^{m+1},\, n-m\in \mathrm{IDesLower}\,u} q^{\mathrm{linv}\,u} X^{\mathrm{deslower}\,u} Z^{\mathrm{lower}\,u}\\ &= \sum_{u\in S_n^m} q^{\mathrm{linv}\,u} X^{\mathrm{deslower}\,u} Z^{\mathrm{lower}\,u} + \sum_{u\in S_{n-1}^m} q^{\mathrm{linv}\,u+n-m-1} X^{\mathrm{deslower}\,u+1} Z^{\mathrm{lower}\,u+1}\\ &= \bar{g}_n^m(q,X,Z) + XZq^{n-m-1}\bar{g}_{n-1}^m(q,X,Z)\end{aligned}$$

Ce qui montre que $\bar{g}_n^m(q,X,Z) = g_n^m(q,X,Z)$. ■

## 4. Une expression analytique de $g_n^n(q,X,Z)$ et spécialisation

Soit $t := (t_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables (commutatives). Posons

$$A_n(t,q,Z) := Zt_1(1+Zt_2q)(1+q+Zt_3q^2)\cdots(1+q+\cdots+q^{n-2}+Zt_nq^{n-1}).$$

Soit $\Lambda_m$ l'homomorphisme défini sur tous les polynômes de variables $t_1, t_2, \ldots, t_m, Z$ par: Pour tout monôme $t_{i_1}t_{i_2}\cdots t_{i_k}Z^j (1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq m)$, $\Lambda_m(t_{i_1}t_{i_2}\cdots t_{i_k}Z^j)$ est le monôme obtenu en remplaçant $Z$ par $Zq$, $t_{i_r}$ par $Xq^{-i_r}$ si $i_{r+1} = i_r + 1$ou $i_r = m$, et par 1 sinon.

Par exemple, $\Lambda_9(t_2t_3t_7t_9Z^2) = Xq^{-2}Xq^{-9}(Zq)^2 = X^2q^{-9}$.

**Théorème 4.1.** *On a*

$$g_n^n(q,X,Z) = \Lambda_n(A_n(t,q,Z)); \quad (n \ge 1) \tag{6}$$

$$\sum_{u\in\Delta_n} q^{\operatorname{linv} u} Z^{\operatorname{lower} u} = \frac{(q;q)_{n-1}}{(1-q)^{n-1}} qZ \left(1 + \sum \frac{q^{i_1+i_2+\cdots+i_k+k}(1-q)^k Z^k}{(1-q^{i_1})(1-q^{i_2})\cdots(1-q^{i_k})}\right); \quad (n\ge 2) \tag{7}$$

$$d_n = (n-1)!\left(1+\sum \frac{1}{i_1 i_2\cdots i_k}\right) \quad (n\ge 2) \tag{8}$$

*où les deux dernières sommations sont étendues à tous les k-uples $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ tels que $k \ge 1$, $2 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n-2$ et $i_{j+1} - i_j > 1$ $(0 \le j \le k-1)$ avec la convention $i_0 = 0$.*

Quand $X = 0$, alors (6) est tranformé en (7), et quand $q = Z = 1$, alors (7) est tranformé en (8).

Prenons, par exemple, $n = 6$. La relation (8) donne

$$d_6 = 120\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2\cdot 4}\right) = 120+60+40+30+15 = 265.$$

Pour toute permutation $\sigma = x_1x_2\cdots x_n$ de $[n]$ de lower records $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}$, posons

$$\operatorname{poids}\sigma := t_{i_1}t_{i_2}\cdots t_{i_k} q^{\operatorname{inv}\sigma} Z^k.$$

**Lemme 4.2.** *On a*

$$\sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{poids}\sigma = A_n(t,q,Z).$$

**Preuve.** Considérons la bijection $\theta_2 : S_n \longrightarrow [n]\times S_{n-1}; \sigma := x_1x_2\cdots x_n \mapsto (k,\sigma')$ où $k = x_n$ et $\sigma' := \operatorname{red} x_1x_2\cdots x_{n-1}$ est la permutation de $[n-1]$ déduite de $x_1x_2\cdots x_{n-1}$ en diminuant de 1 toute lettre supérieure à $k$.

Si $\sigma' = x_1'x_2'\cdots x_{n-1}'$, alors $x_i'$ est un lower record de $\sigma'$ si et seulement si $x_i$ est un lower record de $\sigma$. De plus, $\operatorname{inv}\sigma = \operatorname{inv}\sigma' + n - k$. Par conséquent,

$$\operatorname{poids}\sigma = \begin{cases} Zt_nq^{n-1}\operatorname{poids}\sigma' & \text{si } k=1;\\ q^{n-k}\operatorname{poids}\sigma' & \text{si } k\neq 1.\end{cases}$$

On en déduit que

$$\sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{poids}\sigma = (Zt_nq^{n-1}+1+q+\cdots+q^{n-2})\sum_{\sigma'\in S_{n-1}}\operatorname{poids}\sigma'.$$

Comme poids $1 = Zt_1$, alors on a le lemme. ∎

On est donc en mesure de démontrer l'identité (6) du Théorème 4.1.

Soit $\sigma \in S_n$, $\operatorname{Lower}\sigma = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}\}$ et $\operatorname{IDesLower}\sigma = \{x_{i_{a(1)}}, x_{i_{a(2)}}, \ldots, x_{i_{a(r)}}\}(1 \le a(1) < a(2) < \cdots < a(r) \le k)$. On a:

$$\begin{aligned}&\mathit{poids}\,\sigma := t_{i_1}t_{i_2}\cdots t_{i_k}q^{\operatorname{inv}\sigma}Z^k;\\ &t_{i_{a(s)+1}} = t_{i_{a(s)}+1} \quad (1\le s\le r);\\ &t_{i_{j+1}} \neq t_{i_j+1},\ j\neq a(s) \quad (1\le s\le r).\end{aligned}$$

Ainsi

$$\Lambda_n(\operatorname{poids}\sigma) = X^r q^{-(i_{a(1)}+i_{a(2)}+\cdots+i_{a(r)})}Z^kq^kq^{\operatorname{inv}\sigma} = q^{\operatorname{linv}\sigma}X^{\operatorname{deslower}\sigma}Z^{\operatorname{lower}\sigma}.$$

En sommant sur $S_n$ et en utilisant le lemme, on obtient l'identité (6). ∎

## References


[1] R. Clarke, G.N. Han, J. Zeng, A combinatorial interpretation of the Seidel generation of $q$-derangement numbers, Ann. Comb. 1 (1997) 313–327.
[2] L. Comtet, Analyse combinatoire, in: Collection SUP, Tome 2, Presses universitaires de France, 1970.
[3] J. Désarménien, Une autre interprétation du nombre de dérangements, Sém. Lothar. Combin. B08b (1982).
[4] D. Dumont, A. Randrianarivony, Dérangements et nombres de Genocchi, Discrete Math. 132 (1994) 37–49.
[5] D. Foata, G.N. Han, Signed words and permutations, II; The Euler-Mahonian polynomials, Electron. J. Combin. 11 (2) (2005) 18 pages, #R22 (The Stanley Festschrift).
[6] D. Foata, G.N. Han, Signed words and permutations, IV; fixed and pixed points, Israel J. Math. 163 (1) (2008) 217–240.
[7] D. Foata, G.N. Han, Statistical Distributions on Words and $q$-calculus on Permutations, Strasbourg, septembre, vol. 29, 2007.
[8] D. Foata, G.N. Han, Fix-Mahonian calculus, II: Further statistics, J. Combin. Theory Ser. A 115 (5) (2008) 726–736.
[9] G. Gasper, M. Rahman, Basic Hypergeometric Series, in: Encyclopedia of Math. and its Appl., vol. 35, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990.
[10] Ira M. Gessel, C. Reutenauer, Counting permutations with given cycle structure and descent set, J. Combin. Theory Ser. A 64 (1993) 189–215.